Abschätzungen für die Partialsummen und für die $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel allgemeiner Orthogonalreihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Einleitung

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem. Sei $\lambda(\omega)$ $(\omega \geqq 0)$ eine positive, im strengen Sinne wachsende Funktion mit $\lambda(0)=0$ und $\lambda(n) \to \infty$ und $\Lambda(\omega)$ die eindeutig bestimmte inverse Funktion von $\lambda(\omega)$. Wir setzen $\mu_n = [\Lambda(2^n)]$.[1]) Es seien $n_0 < n_1 < \ldots < n_i < \ldots$ die Indizes n, für welche $\mu_{n+1} > \mu_n$ gilt. Die n-te Teilsumme, bzw. das n-te $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

wird mit $s_n(x)$, bzw. mit $\sigma_n(\{\lambda(n)\}; x)$ bezeichnet, d. h. ist

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x), \quad \sigma_n(\{\lambda(n)\}; x) = \frac{1}{\lambda(n+1)} \sum_{\nu=0}^{n+1} \big(\lambda(n+1) - \lambda(\nu)\big) c_\nu \varphi_\nu(x).$$

K. TANDORI [3] hat die folgenden Sätze bewiesen:

S a t z A. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche die Bedingung*

$$w(n) = o(\log n) \tag{2}$$

erfüllt. Es kann dann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß in (a, b) überall gilt:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x) \right| = \infty. \tag{3}$$

Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

S a t z B. *Es sei $\{l_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n}{l_n^2} = \infty \tag{4}$$

[1]) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

erfüllt. Es kann dann ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, so daß in (a, b) überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{l_N}\left|\sum_{n=0}^{N}\Phi_n(x)\right|=\infty \tag{5}$$

ist. Dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann sogar gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Satz C. *Es sei $\{w_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche die Bedingung*

$$w_n = o(\log\log n) \tag{6}$$

erfüllt. Dann kann man eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}\in l^2$ und ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart angeben, daß für jedes $\alpha>0$ überall in (a, b)

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{w_N}\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(\alpha)}a_\nu\Phi_\nu(x)\right|=\infty \tag{7}$$

besteht. Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

G. Alexits [1] hat den folgenden Satz bewiesen:

Satz D. *Ist $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton zunehmende Zahlenfolge und genügen die nicht verschwindenden, sonst beliebigen Koeffizienten $c_0, c_1, \dots$ der Bedingung*

$$\sum\frac{c_n^2}{\lambda_n^2\sum\limits_{\nu=0}^{n}c_\nu^2}<\infty, \tag{8}$$

so gilt fast überall

$$s_n(x)=o_x\left(\lambda_n\log n\cdot\sqrt{\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu^2}\right).^{*)}$$

In einem anderen Aufsatz hat Verfasser [2] (Satz VI) u. a. einen allgemeinen Satz, welcher das $(R, \lambda(n), 1)$-Analogon des Satzes D als Spezialfall enthält, bewiesen. Dieser Spezielfall lautet folgenderweise:

Satz E. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Genügen die Koeffizienten $c_0(\neq 0), c_1, \dots$ und die Folge $\{\lambda_n\}$ der Bedingung (8), so gilt fast überall*

$$\sigma_n(\{\lambda(n)\};x)=o_x\left(\lambda_n\log\log\lambda(n)\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

In diesem Aufsatz werden wir beweisen, daß die Sätze D und E nicht verbessert werden können. Es gelten nämlich die folgenden Sätze:

*) Der Kürze halber schreiben wir immer $\log n\cdot U$ statt $(\log n)U$.

Satz I. *Es seien $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, für welche die Bedingungen*

$$\lambda_n \log n \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \lambda_{n+1} \log (n+1) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (n=2, 3, \ldots), \tag{9}$$

$$\lambda_n \log n \geqq 1 \quad (n > m_0)$$

und

$$\sum \frac{a_n^2}{\lambda_n^2 \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu^2} = \infty \tag{10}$$

erfüllt sind. Dann kann ein im Intervall (a, b) orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß in (a, b) fast überall

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{\lambda_N \log N \cdot \left(\sum\limits_{\nu=0}^{N} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x)\right| = \infty \tag{11}$$

gilt.

Satz II. *Es seien $\{a_n\}$ eine Koeffizientenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, für welche die Bedingungen* (10),

$$\lambda_n \log\log \lambda(n) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \lambda_{n+1} \log\log \lambda(n+1) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

$$\lambda_n \log\log \lambda(n) \geqq 1 \quad (n > m_0)$$

und

$$A_{\mu_{n_i}}^2 \geqq A_{\mu_{n_{i+1}}}^2 \qquad \left(A_{\mu_{n_i}}^2 = \sum_{\nu=\mu_{n_i}+1}^{\mu_{n_{i+1}}} a_\nu^2\right) \tag{13}$$

erfüllt sind. Gilt $\log n_i = O(\log i)^2)$, so kann ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, so daß in (a, b) fast überall

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{\lambda_N \log\log \lambda(N) \cdot \left(\sum\limits_{\nu=0}^{N} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left|\frac{1}{\lambda(N+1)} \sum_{\nu=0}^{N+1} (\lambda(N+1) - \lambda(\nu)) a_\nu \Phi_\nu(x)\right| = \infty \tag{14}$$

gilt.

Der Spezialfall $\lambda(n) = n$ verdient eigens ausgesprochen zu werden:

Satz III. *Es sei $\{a_n\}$ eine Koeffizientenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, für welche die Bedingungen* (10),

$$\lambda_n \log\log n \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \lambda_{n+1} \log\log (n+1) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \lambda_n \log\log n \geqq 1 \quad (n > m_0)$$

[2]) Diese Bedingung besteht immer mit Ausnahme sehr extremer Fälle.

und

$$\sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} a_\nu^2 \geqq \sum_{\nu=2^{m+1}+1}^{2^{m+2}} a_\nu^2$$

erfüllt sind. Dann kann ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß in (a, b) fast überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N \log\log N\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} |\sigma_N(x)| = \infty \tag{15}$$

gilt, wobei $\sigma_n(x)$ das n-te $(C, 1)$-Mittel der Reihe $\sum a_\nu \Phi_\nu(x)$ bezeichnet.

Weiterhin ergibt sich aus dem Satz II im Falle $\lambda_n^{-1} = \log\log\lambda(n)$ unmittelbar der folgende:

S a t z IV. *Es sei $\{a_n\} \in l^2$ eine Koeffizientenfolge mit (13), so ist die Zygmundsche Bedingung*

$$\sum a_n^2 \log\log_+^2 \lambda(n) < \infty\,^{3)}$$

nicht nur hinreichend, sondern im Falle $\log n_i = O(\log i)$ auch notwendig dafür, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $(R, \lambda(n), 1)$-summierbar ist, sogar gibt es im Falle $\sum_{n=0}^{\infty} a^2 \log\log_+^2 \lambda(n) = \infty$ ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel nicht beschränkt divergieren.

Von dem Satz I kann auch unmittelbar abgelesen werden, daß im Falle $\{a_n\} \in l^2$, $a_n \geqq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $\lambda_n = \frac{1}{\log n}$, d. h. im Falle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty$, ein in (a, b) orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden kann, so daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Phi_n(x)$ in (a, b) fast überall *nicht beschränkt divergiert.*

Man kann leicht einsehen, daß der Satz I auch die Sätze A und B enthält. Zuerst sei gezeigt, daß der Satz A aus dem Satz I folgt. Nach (2) besteht

$$\lambda_n = \frac{w(n)}{\log n} = o(1). \tag{16}$$

Darum kann eine Indexfolge $\{\nu_k\}$ bestimmt werden, so daß für $n > \nu_k$: $\lambda_n \leqq \frac{1}{k}$ und $(\nu_{k+1} - \nu_k)k^2 \geqq (\nu_k - \nu_{k-1})(k-1)^2$ gelten. Wir setzen

$$a_n = \frac{1}{k(\nu_{k+1} - \nu_k)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für} \quad \nu_k < n \leqq \nu_{k+1}.$$

[3]) Siehe A. Zygmund [5]; weiterhin ist $\log_+ x = \max\{1, \log x\}$.

Offenbar ist $\{a_n\}$ eine monotone Koeffizientenfolge, für die

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\lambda_n^2 \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2} \geqq \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \frac{a_n^2}{\lambda_n^2} = \infty$$

gelten. Also genügen die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und diese Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ den Bedingungen des Satzes I, und so gibt es ein orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem, für welches (11), und infolge (16) auch (3) besteht.

Man kann auch das leicht beweisen, daß der Satz I auch den Satz B enthält. Es sei $a_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und $\lambda_n^{*2} = \dfrac{l_n^2}{n \log^2 n}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n^{*2} n} = \infty$ wegen (4), also kann eine Zahlenfolge $\{\eta_n\}$ mit $\eta_n \to \infty$, $\lambda_n^* \eta_n (\log n) \sqrt{n} \leqq \lambda_{n+1}^* \eta_{n+1} (\log(n+1))\sqrt{n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n^{*2} \eta^2 n} = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n^* \eta_n \log n \cdot n} < \infty$ angegeben werden. (Siehe den Beweis des Satzes I.) Aus der letzten Ungleichung folgt $\lambda_n \log n \geqq 1$ für $n > m_0$ mit $\lambda_n = \lambda_n^* \eta_n$. Offenbar genügen diese Koefffizientenfolge und die Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ den Bedingungen des Satzes I, folglich kann auch jetzt ein orthonormiertes gleichmäßig beschränktes Funktionensystem angegeben werden, für welches (11), und nach der Definition von λ_n gilt auch (5).

Wir können leicht einsehen, daß der Satz III auch den Satz C mit $\alpha = 1$ enthält. Nach (6) besteht

$$\lambda_n = \frac{w_n}{\log \log n} = o(1). \tag{17}$$

Darum kann eine Indexfolge $\{\nu_k\}$ derart bestimmt werden, daß für beliebiges s und $n > \nu_k$: $\lambda_{2^n+s} \leqq 1/k$ und $(\nu_{k+1} - \nu_k)k^2 \geqq (\nu_k - \nu_{k-1})(k-1)^2$ gelten. Wir setzen

$$A_{2^n}^2 = \frac{1}{k^2(\nu_{k+1} - \nu_k)} \quad \text{für } \nu_k < n \leqq \nu_{k+1} \quad \text{und} \quad a_m^2 = \frac{A_{2^n}^2}{2^n} \quad \text{für } 2^n < m \leqq 2^{n+1}.$$

Offenbar ist $\{A_{2^n}\}$ eine monoton abnehmende Zahlenfolge, für die

$$d^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = O(1) \sum_{n=0}^{\infty} A_{2^n}^2 < \infty$$

und

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m^2}{\lambda_m^2 \sum_{s=0}^{m} a_s^2} \geqq d \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{a_m^2}{\lambda_m^2} \geqq d \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{1}{k^2} = \infty$$

gelten. Also genügen diese Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und diese Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ den Bedingungen des Satzes III, folglich gibt es ein orthonormiertes Funktionensystem, für welches (15), und nach (17) auch die Beziehung (7) mit $\alpha = 1$ besteht.

§ 1. Beweis von Satz I

Zum Beweis werden wir den folgenden Satz von K. Tandori [3] benötigen:

Es sei $\{b_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, für welche die Bedingung

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \log^2 n = \infty$$

erfüllt ist. Dann kann ein im Intervall (a, b) orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, für welches die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Phi_n(x)$$

im Intervall (a, b) überall divergiert.

Es seien $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, welche die Bedingungen (9) und (10) erfüllen. Ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\lambda_n \log n \cdot \sum^{n} a_\nu^2} < \infty, \tag{1. 1}$$

dann sei $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$. Besteht (1. 1) nicht, so sei $\lambda_n^* = \max\{\lambda_n, \sqrt{\lambda_n \log n}\}$. Im Falle

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\lambda_n^* \log n \cdot \sum^{n} a_\nu^2} < \infty \tag{1. 2}$$

setzen wir $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n^*$, gegenfalls $\tilde{\lambda}_n = \max\{\lambda_n, \sqrt{\lambda_n^* \log n}\}$. Die so definierte Zahlenfolge $\{\tilde{\lambda}_n\}$ genügt wegen der monotonen Abnahme von $\{a_n\}$ den Bedingungen (9) und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n^2 \sum^{n} a_\nu^2} = \infty, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n \log n \cdot \sum^{n} a_\nu^2} < \infty. \tag{1. 3}$$

Daraus folgt die Existenz einer positiven, stets wachsenden Zahlenfolge $\{\eta_n\}$ mit $\eta_n \to \infty$ und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n^2 \eta_n^2 \sum^{n} a_\nu^2} = \infty. \tag{1. 4}$$

Wir setzen $\bar{\lambda}_n = \tilde{\lambda}_n \eta_n$. Dann ist auf Grund von (9), (1. 4) und der Definition von $\{\bar{\lambda}_n\}$ mit den monotonen Koeffizienten $\gamma_n^2 = \dfrac{a_n^2}{\bar{\lambda}_n^2 \log^2 n \cdot \sum^{n} a_\gamma^2}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n^2 \log^2 n = \infty.$$

Wir können also den zitierten Satz von K. Tandori mit den Koeffizienten $b_n = \gamma_n$ anwenden. Folglich gibt es ein orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die Reihe $\sum \gamma_n \Phi_n(x)$ in (a, b) überall divergiert. Mit einer Abelschen Transformation ergibt sich mit der Abkürzung $t_n = \dfrac{1}{\bar{\lambda}_n \log n \cdot \sqrt{\sum^n a_\gamma^2}}$:

$$\sum_{n=2}^{N} \gamma_n \Phi_n(x) = \sum_{n=2}^{N-1} (t_n - t_{n+1}) \bar{s}_n(x) + t_N \bar{s}_N(x) - t_2 \bar{s}_1(x)$$

und so gilt

$$t_N \bar{s}_N(x) = \sum_{n=2}^{N} \gamma_n \Phi_n(x) - \sum_{n=2}^{N-1} (t_n - t_{n+1}) \bar{s}_n(x) + t_2 \bar{s}_1(x), \tag{1.5}$$

wobei $\bar{s}_n(x)$ die n-te Partialsumme der Reihe $\sum a_n \Phi_n(x)$ bezeichnet.

Mit einfacher Rechnung bekommen wir die Abschätzung:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (t_n - t_{n+1}) \int_a^b |\bar{s}_n(x)|\, dx \leqq \sqrt{b-a} \sum_{n=2}^{\infty} (t_n - t_{n+1}) \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

Für jedes s ist mit $\alpha_n = \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_n^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$

$$\sum_{n=2}^{s} \alpha_n (t_n - t_{n+1}) = \alpha_2 t_2 + \sum_{n=3}^{s} t_n (\alpha_n - \alpha_{n-1}) - \alpha_s t_{s+1},$$

woraus wegen $\alpha_s t_{s+1} \to 0$ $(s \to \infty)$ folgt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n (t_n - t_{n+1}) = \alpha_2 t_2 + \sum_{n=3}^{\infty} t_n (\alpha_n - \alpha_{n-1}). \tag{1.7}$$

Wir erhalten auf Grund von (1. 3)

$$\sum_{n=3}^{\infty} t_n (\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \sum_{n=3}^{\infty} t_n \frac{\alpha_n^2 - \alpha_{n-1}^2}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} = O(1) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n^2}{\bar{\lambda}_n \log n \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2} < \infty,$$

woraus sich auf Grund von (1. 6), (1. 7) und dem B. Levischen Satz ergibt, daß die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (t_n - t_{n+1}) \bar{s}_n(x)$$

in (a, b) fast überall konvergiert. So divergiert die rechte Seite von (1. 5) nach obigen fast überall, und folglich ist fast überall

$$t_N |\bar{s}_N(x)| = \frac{1}{\bar{\lambda}_N \log N \cdot \sqrt{\sum^{N} a_\nu^2}} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x) \right| \neq o(1).$$

Daraus folgt nach der Definition von $\bar{\lambda}_n$, daß die Beziehung (11) mit diesem Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ fast überall in (a, b) erfüllt wird.

Damit haben wir den Satz I vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz II

Zum Beweis werden wir den folgenden Satz von K. Tandori [4] benötigen:

Es sei $\{\nu_k\}$ $(0=\nu_0<\nu_1<\ldots<\nu_k<\ldots)$ eine Indexfolge. Damit die Folge der ν_i-ten Partialsummen der Orthogonalreihe (1) *für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert, ist notwendig, daß*

$$(2.1)\qquad \sum_{l=0}^{\infty} C_l^2(\{\nu_k\})\log_+^2 C_l^{-2}(\{\nu_k\})<\infty$$

gilt, wobei $C_l^2(\{\nu_k\}) = c_{\nu_l+1}^2+\ldots+c_{\nu_{l+1}}^2$ ist.

Sogar ergibt sich aus dem Beweis, den Herr. Tandori hierfür angegeben hat, etwas mehr:

Ist die Bedingung (2. 1) *nicht erfüllt, dann gibt es ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_i(x)\}$ derart, daß die Folge der ν_i-ten Partialsummen der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i\Phi_i(x)$ fast überall divergiert.*

Seien $\{a_n\}$ eine positive Koeffizientenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, welche die Bedingungen (10), (12) und (13) erfüllen. Ist

$$(2.2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{\lambda_n\log\log_+\lambda(n)\cdot\sum^{n} a_\nu^2}<\infty,$$

so sei $\tilde\lambda_n=\lambda_n$. Besteht (2. 2) nicht, so sei $\lambda_n^* = \max\{\lambda_n, (\lambda_n\log\log_+\lambda(n))^{1/2}\}$. Im Falle

$$(2.3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{\lambda_n^*\log\log_+\lambda(n)\cdot\sum^{n} a_\nu^2}<\infty$$

setzen wir $\tilde\lambda_n=\lambda_n^*$, im entgegengesetzten Fall $\tilde\lambda_n = \max\{\lambda_n, (\lambda_n^*\log\log_+\lambda(n))^{1/2}\}$. Die so definierte Zahlenfolge $\{\tilde\lambda_n\}$ erfüllt offenbar die Bedingungen (12) und

$$(2.4)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{\tilde\lambda_n^2\sum^{n} a_\nu^2}=\infty.$$

Die Ungleichung

$$(2.5)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{\tilde\lambda_n\log\log_+\lambda(n)\cdot\sum^{n} a_\nu^2}<\infty$$

folgt in den ersten beiden Fällen unmittelbar aus der Definition von $\{\tilde\lambda_n\}$, im letzten Fall kann man sie mit der folgenden einfachen Rechnung beweisen. Nach (12) ist $\lambda_n^*\geq 1$ für alle genügend große n, also gilt auf Grund von (13) im Falle $\tilde\lambda=(\lambda_n^*\log\log_+\lambda(n))^{1/2}$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=\mu_{n_i}+1}^{\mu_{n_{i+1}}}\frac{a_k^2}{\tilde\lambda_k\log\log_+\lambda(k)\cdot\sum^{k} a_\nu^2}=O(1)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=\mu_{n_i}+1}^{\mu_{n_{i+1}}}\frac{a_k^2}{\log\log_+^{3/2}\lambda(k)\cdot\sum^{k} a_\nu^2}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\log_+^{3/2} n_i\cdot\sum^{\mu_{n_i}} a_\nu^2}A_{\mu_{n_i}}^2=O(1)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i\log_+^{3/2} i}<\infty,$$

womit (2. 5) in jedem Fall bewiesen ist. Wegen (2. 4) gibt es eine positive, stets wachsende Zahlenfolge $\{\eta_n\}$ mit $\eta_n \to \infty$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n^2 \eta_n^2 \sum^{n} a_\nu^2} = \infty. \tag{2.6}$$

Wir setzen $\bar{\lambda}_n = \tilde{\lambda}_n \eta_n$ und

$$b_n^2 = \frac{a_n^2}{\bar{\lambda}_n^2 \log\log_+^2 \lambda(n) \cdot \sum^{n} a_\nu^2}, \quad \beta_{\mu_{n_i}}^2 = \sum_{\nu=\mu_{n_i}+1}^{\mu_{n_{i+1}}} b_\nu^2.$$

Offenbar bestehen die Ungleichungen

$$\beta_{\mu_{n_i}}^2 \geqq \beta_{\mu_{n_{i+1}}}^2 \quad (i=1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{\mu_{n_i}}^2 < \infty.$$

Dann ist aber $\beta_{\mu_{n_i}}^2 = o(i^{-1})$ und es gilt nach (2. 6)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_{\mu_{n_i}}^2 \log_+^2 \beta_{\mu_{n_i}}^{-2} \geqq \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{\mu_{n_i}}^2 \log_+^2 i \geqq \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\bar{\lambda}_n^2 \sum^{n} a_\nu^2} = \infty \qquad (\infty > \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0).$$

Man kann also die zweite Form des erwähnten von K. TANDORI mit den Koeffizienten $c_n = b_n$ und mit der Indexfolge $\nu_i = \mu_{n_i}$ anwenden. So ergibt sich ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welche die Folge der μ_{n_i}-ten Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Phi_n(x)$ in (a, b) überall divergiert. Wir bekommen durch Abelsche Transformation mit der Abkürzung $t_n = \dfrac{1}{\bar{\lambda}_n \log\log_+ \lambda(n) \cdot (\sum^{n} a_\nu^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$\sum_{i=2}^{\mu_{n_N}} b_i \Phi_i(x) = \sum_{i=2}^{\mu_{n_N}-1} (t_i - t_{i+1}) \bar{s}_i(x) + t_{\mu_{n_N}} \bar{s}_{\mu_{n_N}}(x) - t_2 \bar{s}_1(x)$$

und so gilt

$$t_{\mu_{n_N}} \bar{s}_{\mu_{n_N}}(x) = \sum_{i=2}^{\mu_{n_N}} b_i \Phi_i(x) - \sum_{i=2}^{\mu_{n_N}-1} (t_i - t_{i+1}) \bar{s}_i(x) + t_2 \bar{s}_1(x), \tag{2.7}$$

wobei $\bar{s}_i(x)$ die i-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ bezeichnet. Genau so wie im Beweis des Satzes I kann man beweisen, daß die Reihe

$$\sum_{i=2}^{\infty} (t_i - t_{i+1}) \bar{s}_i(x)$$

in (a, b) fast überall konvergiert. Nach dem obigen divergiert aber die rechte Seite von (2. 7) in (a, b) fast überall, also ist fast überall

$$t_{\mu_{n_N}} |\bar{s}_{\mu_{n_N}}(x)| = \frac{1}{\bar{\lambda}_{\mu_{n_N}} \log\log_+ \lambda(\mu_{n_N}) \cdot \left(\sum^{\mu_{n_N}} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left| \sum_{\nu=0}^{\mu_{n_N}} a_\nu \Phi_\nu(x) \right| \neq o(1). \tag{2.8}$$

Weiterhin gilt nach (12), (2. 5) und der Definition von $\{\tilde{\lambda}_n\}$ mit der Abkürzung $l_n = \dfrac{1}{\tilde{\lambda}_n \log\log_+ \lambda(n)\cdot(\sum^n a_\nu^2)^{\frac{1}{2}}}$ die folgende Abschätzung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \int_a^b (\bar{s}_{\mu_n}(x) - \bar{\sigma}_{\mu_n}(\{\lambda(n)\};\, x))^2\, dx = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_\nu^2 \lambda^2(\nu) \frac{1}{\lambda^2(\mu_n+1)} =$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_\nu^2 \lambda^2(\nu) = O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_\nu^2 \lambda^2(\nu) \right) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{l_{\mu_n}^2}{2^{2n}} =$$

$$= O(1) \sum_{l=0}^{\infty} 2^{2k} \left(\sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_\nu^2 \right) l_{\mu_{k+1}}^2 \frac{1}{2^{2k}} =$$

$$= O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\lambda}_{\mu_{k+1}}^2 \log\log_+^2 \lambda(\mu_{k+1})\cdot \sum^{\mu_{k+1}} a_\nu^2} \sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_\nu^2 =$$

$$= O(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n^2 \log\log_+^2 \lambda(n)\cdot \sum^n a_\nu^2} < \infty,$$

wobei $\bar{\sigma}_n(\{\lambda(n)\};\, x)$ das n-te $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ bezeichnet. Daraus ergibt sich, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 (\bar{s}_{\mu_n}(x) - \bar{\sigma}_{\mu_n}(\{\lambda(n)\};\, x))^2$$

fast überall konvergiert, also fast überall

$$\bar{s}_{\mu_n}(x) - \bar{\sigma}_{\mu_n}(\{\lambda(n)\};\, x) = o_x\left(\tilde{\lambda}_{\mu_n} \log\log_+ \lambda(\mu_n)\cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\mu_n} a_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \tag{2.9}$$

gilt. Auf Grund von (2. 7) ergibt sich aus (2. 8) und (2. 9), daß die Beziehung (14) für dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ in (a, b) fast überall besteht, was zu beweisen war.

Schriftenverzeichnis

[1] Alexits, G., Sur les sommes de fonctions orthogonales, *Annales Soc. Math. Polonaise*, **25** (1952), 183–187.

[2] Leindler, L., Über die Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen, Zu erscheinen in *Acta Sci. Math.*, **24** (1963).

[3] Tandori, K., Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57–130.

[4] Tandori, K., Über die Divergenz der Orthogonalreihen, *Publicationes Math. Debrecen*, **8** (1961), 291–307.

[5] Zygmund, A., Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales, *Bulletin Intern. Acad. Polonaise Sci. Lettres (Cracovie)*, série A (1927), 293–308.

(Eingegangen am 7. Dezember 1961)